数理解析研究所講究録
1012 巻 1997 年 186-190

P.T.MOCANU の補題の拡張

和歌山大学・教育　　鈴木　徳彦　　(Norihiko SUZUKI)

1　導入と準備

$p(z)$, $q(z)$ を単位円板 U で解析的であるとする。$w(0)=0$ かつ $|w(z)|<1(z\in \mathrm{U})$ を満たし, $p(z)=q(w(z))$ となるような解析関数 $w(z)$ が存在すれば, 関数 $p(z)$ は U で $q(z)$ に subordinate であるという。このとき, $p(z)\prec q(z)$ または $p\prec q$ と書く。 $q(z)$ が U で単葉ならば subordination $p\prec q$ は $p(0)=q(0)$, $p(\mathrm{U})\subset q(\mathrm{U})$ と同値である。

1986 年の Mocanu [1] の On starlikness of libera transform の補題を 2 つ引用する。これについて拡張を試み, また 新たなの証明をつけた。

補題 1.[1]　　関数 $p(z)$ が単位円板 U で解析的で $p(0)=1$ で, かつ $\alpha>0$

(1.1)
$$\mathrm{Re}[zp'(z)+\alpha p(z)]>0\ ,\quad z\in \mathrm{U}$$

ならば, Re $p(z)>0$, $z\in \mathrm{U}$ となる。

補題 2.[1]　　関数 $P(z)$ が単位円板 U で解析的で $P(0)=1$ で, かつ

(1.2)
$$\mathrm{Re}[zP'(z)+P(z)]>0\ ,\quad z\in \mathrm{U}$$

ならば, $|\arg P(z)|<\frac{\pi}{3}$, $z\in \mathrm{U}$ となる。

2　主な結果

定理の証明には, 次の Jack[2] （または, Miller and Mocanu [3] ） が必要である。

補題 3.　　関数 $w(z)$ を単位円板 U で解析的で $w(0)=0$ とする。 $|w(z)|$ が円 $\{|z|=r\}$ $(0\leq r<1)$ 上の点 z_0 で最大値をとるとき,

(2.1)
$$\frac{z_0w'(z_0)}{w(z_0)}=k\geq 1$$

となる。

定理. 関数 $p(z)$ が単位円板 U で解析的で $p(0)=1$ で, かつ

(2.2) $$\mathrm{Re}[zp'(z)+\alpha p(z)]>\beta\ ,\ z\in \mathrm{U}$$

ならば,

(2.3) $$\mathrm{Re}\ p(z)>\gamma\ ,\ z\in \mathrm{U}$$

となる。 ただし, α , β , γ はすべて実数で, $\alpha>0$, $\alpha>\beta$, $\gamma<1$ かつ

(2.4) $$\beta>-\frac{1-\gamma}{2}+\alpha\gamma$$

を満たすものとする。

(証明) $p(0)=1$, $\gamma<1$ より, $z=0$ の近傍では, Re $p(z)>\gamma$ が成立している。$\sigma=2\gamma-1$ と置けば,

(2.5) $$p(z)\prec\frac{1-\sigma z}{1-z}$$

が成立する。これは,

(2.6) $$p(z)=\frac{1-\sigma w(z)}{1-w(z)}\qquad (w(z)\neq 1)$$

と書けて, $w(z)$ は U で解析的で $w(0)=0$, $|w(z)|<1$ である。このとき,

$$\mathrm{Re}\ p(z)>\gamma\ ,\ z\in \mathrm{U}\Longleftrightarrow p(z)=\frac{1-\sigma w(z)}{1-w(z)}$$

が成立する。

ここで (2.6) より,

$$\begin{aligned} zp'(z) &= z\cdot\frac{w'(z)}{w(z)}\cdot\frac{w(z)(1-\sigma)}{(1-w(z))(1-\sigma w(z))}\cdot\frac{1-\sigma w(z)}{1-w(z)} \\ &= \frac{zw'(z)}{w(z)}\cdot\frac{w(z)(1-\sigma)}{(1-w(z))^2} \qquad (2.7) \end{aligned}$$

を得る。今仮に, ある $z_0\in \mathrm{U}$ に対して,

$$\mathrm{Re}\ p(z)>\gamma\ ,\ |z|<|z_0|\quad \text{かつ}\quad \mathrm{Re}\ p(z_0)=\gamma$$

となったとすると, $|w(z_0)|=1$, $w(z_0)=e^{i\theta}$ $(\theta\neq 0)$ と置け, 補題 3 を使う。(2.7) より,

$$\begin{aligned} z_0p'(z_0) &= \frac{z_0w'(z_0)}{w(z_0)}\cdot\frac{w(z_0)(1-\sigma)}{(1-w(z_0))^2} \\ &= k\cdot\frac{(1-\sigma)e^{i\theta}}{1-2e^{i\theta}+e^{2i\theta}} \\ &= k\cdot\frac{1-\sigma}{2(\cos-1)}=k\cdot\frac{1-\gamma}{\cos-1} \\ &\le -\frac{1-\gamma}{2}, \qquad (2.8) \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}[z_0p'(z_0)+\alpha p(z_0)] &= z_0p'(z_0)+\alpha\operatorname{Re}\ p(z_0)\\ &\le -\frac{1-\gamma}{2}+\alpha\gamma<\beta\end{aligned} \tag{2.9}$$

となって, $z_0 \in \mathrm{U}$ に対して, $\operatorname{Re}[z_0p'(z_0)+\alpha p(z_0)] < \beta$ が成立してこれは仮定に矛盾する。よって, $z_0 \in \mathrm{U}$ は存在せず $|w(z)| < 1$ であり, すなわち, すべての $z \in \mathrm{U}$ に対して, $\operatorname{Re}\ p(z) > \gamma$ が成立することが示された。□

定理で $\beta = 0$ とおくと,

$$\gamma < \frac{1}{1+2\alpha} \qquad (\alpha > 0) \tag{2.10}$$

を得, よって

系 1.　関数 $p(z)$ が単位円板 U で解析的で $p(0) = 1$ で

$$\operatorname{Re}[zp'(z)+\alpha p(z)] > 0\ ,\ z \in \mathrm{U} \tag{2.11}$$

ならば,

$$\operatorname{Re}\ p(z) > \gamma\ ,\ z \in \mathrm{U} \tag{2.12}$$

となる。ただし,

$$\gamma < \frac{1}{1+2\alpha} \tag{2.13}$$

を満たすものとする。

特に, $\gamma = 0$ についても成立するから

系 2.　補題 1 が成立する。

次に, 補題 2 の別証明を与える。

(補題 2 の証明)　先ず, 補題 1 より $z \in \mathrm{U}$ に対して, $\operatorname{Re}[zP'(z)+P(z)] > 0$ なら, $\operatorname{Re}\ P(z) > 0$ である。すなわち, $|\arg P(z)| < \frac{\pi}{2}$ である。今, $|\arg P(z)| < \gamma$ に対して, $\gamma = \frac{\pi}{3}$ であることを示す。

$|\arg P(z)| < \frac{\pi}{2}$ だから,

$$P(z) \prec \frac{1-z}{1+z} \tag{2.14}$$

と書けるが一般的には,

$$P(z) \prec \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\sigma} \tag{2.15}$$

と置くと,

$$P(z)=\left(\frac{1-w(z)}{1+w(z)}\right)^{\sigma} \tag{2.16}$$

と書けて, $w(z)$ は $w(0)=0$, $|w(z)|<1$ が成立している。この時,

$$\begin{aligned} |\arg P(z)| &\le \left|\sigma\cdot\arg\left(\frac{1-w(z)}{1+w(z)}\right)\right| \\ &\le |\sigma|\cdot\frac{\pi}{2}=\gamma \end{aligned} \tag{2.17}$$

より, $|\sigma|\cdot\frac{\pi}{2}=\gamma$ （ $\sigma>0$ としてよい ）を満たしている。ここで, (2.12) より,

$$\frac{P'(z)}{P(z)}=\sigma\left(\frac{-w'(z)}{1-w(z)}-\frac{w'(z)}{1+w(z)}\right) \tag{2.18}$$

となり, 今ある $z_0\in U$ に対し, $|z|<|z_0|$ のとき $|\arg P(z)|<\gamma$ かつ $|\arg P(z_0)|=\gamma$ となったとすると, $|w(z_0)|=1$ （ $w(z_0)=e^{i\theta}$, $\theta\neq\pi$ ）とできて, 再び補題 3 が使える。よって (2.12) より,

$$P(z_0)=\left(\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}\right)^{\sigma} \tag{2.19}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} P(z_0)+z_0P'(z_0) &= P(z_0)\left(1+\frac{z_0P'(z_0)}{P(z_0)}\right) \\ &= P(z_0)\left\{1+z_0\sigma\left(\frac{-w'(z_0)}{1-w(z_0)}-\frac{w'(z_0)}{1+w(z_0)}\right)\right\} \\ &= P(z_0)\left(1-k\sigma\frac{2w(z_0)}{1-w^2(z_0)}\right) \\ &= P(z_0)\left(1-\frac{k\sigma}{\sin\theta}i\right) \end{aligned} \tag{2.20}$$

となる。 $1-\frac{k\sigma}{\sin\theta}i$ の偏角を β と置くと, $\beta=\tan^{-1}\left(-\frac{k\sigma}{\sin\theta}\right)$, $|\arg[P(z_0)+z_0P'(z_0)]|=|\gamma+\beta|<\frac{\pi}{2}$ （ $\sigma>0$, $\frac{\pi}{2}\sigma=\gamma$ ）でなければならない。ゆえに,

$$|\gamma+\tan^{-1}\sigma|<\frac{\pi}{2}\ , \tag{2.21}$$

となりこれは, $0<\gamma+\tan^{-1}\sigma<\frac{\pi}{2}$ であり, (2.17) より,

$$\begin{aligned} &\frac{\pi}{2}\sigma+\tan^{-1}\sigma<\frac{\pi}{2} \\ \Longleftrightarrow\ &\sigma+\frac{2}{\pi}\tan^{-1}\sigma<1. \end{aligned} \tag{2.22}$$

(2.16) より, $0<\sigma<1$, $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$ で, $\gamma<\frac{\pi}{3}$ であることがわかり, $\pi=3.14$ $\frac{2}{\pi}=0.6$, $\frac{\pi}{2}=1.57$ として近似値を計算すると, (2.22) を満たす σ は, $\sigma=0.65$ であり, これより

$\gamma = 1.02$ を得る。ゆえに，$\gamma = 1.02 < \frac{\pi}{3} = 1.047$ となり，これは補題 2 の結果を得ている。ただし，この結果は sharp ではない。sharp な結果を得ることは，今後の課題である。これで証明を終了する。□

参考文献

[1] P.T.Mocanu, *On starlikness of Libera transform*, Mathematica, Tome 28(51), N°2, (1986), 153-155.

[2] I.S.Jack, *Functions starlike and convex of order* α, J. London Math. Soc. 3(1971), 469-474.

[3] S.S.Miller and P.T.Mocanu, *Second order differential inequalities in the complex plane*, J. math. Anal. appl. 65(1978), 289-305.